ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Δευτέρα 10 Ιουνίου 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1.α) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ 15.
Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το** $\boldsymbol{A}$ μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της $\boldsymbol{f}$ στο $\boldsymbol{x}$** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

β) Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι $1{-}1$,τότε έχει αντίστροφη. (σελ 35 σχολικό βιβλίο)

γ) Εφόσον ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγουμένου τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

– έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

– έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

– ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ οπότε $\boldsymbol{f^{-1}(f(x))=x,\quad x\in A}$ και $\boldsymbol{f(f^{-1}(y))=y,\quad y\in f(A)}$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $Δ$ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του $Δ$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$. (σελ 142 σχολικό βιβλίο)

Α3. Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1, x_2 \in Δ$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Α4.α) Ο ισχυρισμός είναι λάθος .
Αιτιολόγηση :

Η γνωστή συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. (σελ 134 σχολικό βιβλίο)

β) Ο ισχυρισμός είναι λάθος
Αιτιολόγηση:

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\neq 1 \\ 3, & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2, \quad \text{ενώ} \quad f(1)=3.$$ (σελ 71 σχολικό βιβλίο)

Α5. Σωστή επιλογή είναι η γ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} \underset{\text{οπότε } y\to-\infty}{\overset{\text{θέτω} -x=y}{=}} \lim_{y\to-\infty} e^{y}=0.$$

Β2. Θεωρώ τη συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2,\ x\in[2,3]$.

Η g συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

$$\left.\begin{array}{l} g(2)=e^{-2}-2+2=e^{-2}>0 \\ g(3)=e^{-3}-3+2=\dfrac{1}{e^{3}}-1=\dfrac{1-e^{3}}{e^{3}}<0 \end{array}\right\}\Rightarrow g(2)\cdot g(3)<0$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)$ ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Επίσης $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ άρα η g γνησίως φθίνουσα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

οπότε η $x=x_0$ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ.

Β3. $f'(x)=-e^{-x}<0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1 – 1 και αντιστρέφεται. Για να προσδιορίσουμε την f^{-1} λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)$ ως προς x.

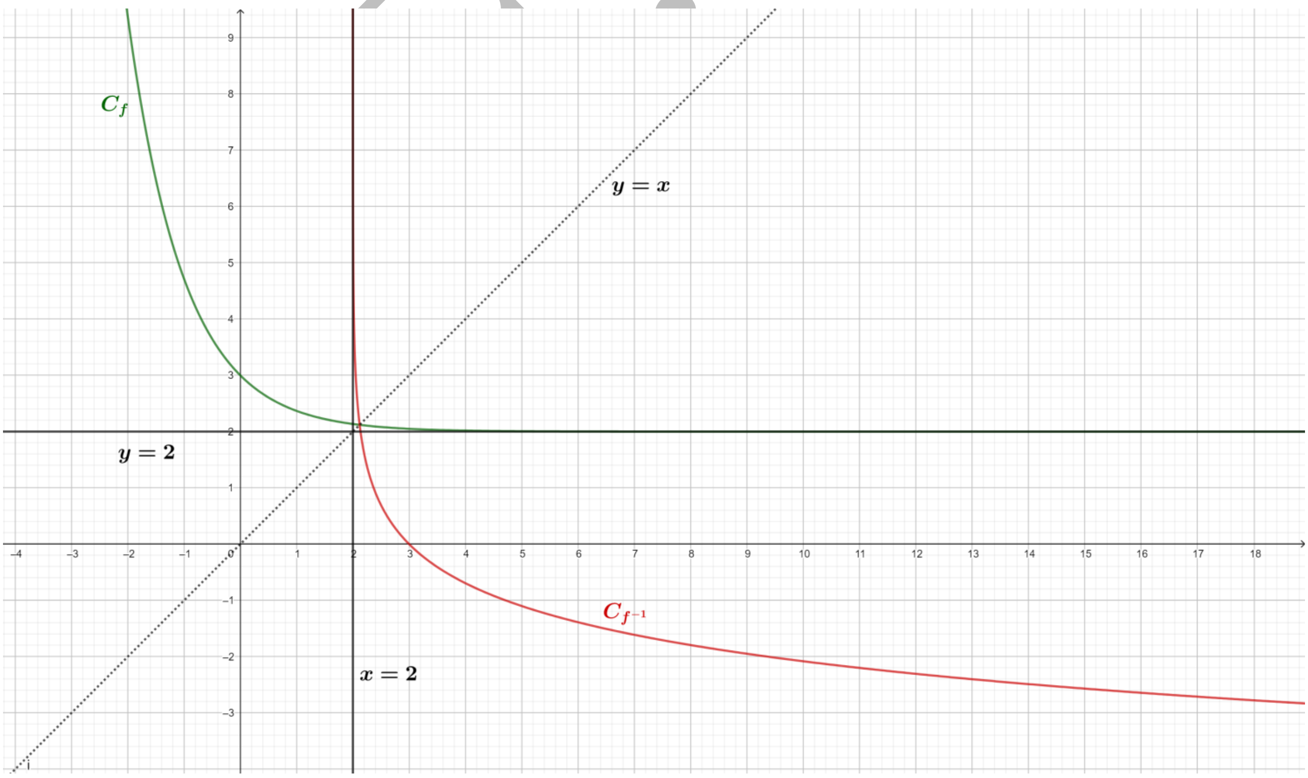
$$y=f(x)\Leftrightarrow y=e^{-x}+2\overset{y>2}{\Leftrightarrow} y-2=e^{-x}\Leftrightarrow -x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2).$$

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2),\ x>2$.

Β4. Ελέγχουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right)\underset{y\to 0^+}{\overset{x-2=y}{=}}\lim_{y\to 0^+}(-\ln y)=+\infty.$$

Άρα η $x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στους πραγματικούς αριθμούς θα είναι και συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Άρα f συνεχής στο $x_0 = 1$.

Επομένως $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x)$, (1)

Αφού $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 + a$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1+\beta$, $f(1) = 1+\alpha$ λόγω της (1) θα είναι $\alpha = \beta$.

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη απαιτώ $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ (2)

Είναι $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+a-1-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$

και $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\chi-1}+\beta\chi-1-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\chi-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (\frac{e^{\chi-1}-1}{x-1} + \frac{\alpha(\mathrm{x}-1)}{x-1}) = 1+\alpha$

αφού $\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\chi-1}-1}{x-1} \overset{0/0}{\underset{dlh}{=}} \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\chi-1}}{1} = 1$.

Επομένως η (2) δίνει , $1+\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$. Τέλος, αφού $\alpha = \beta$ θα είναι και $\beta = 1$.

Γ2. Αν $x>1$, τότε $f'(x) = 2x > 0$. Αν $x<1$, τότε $f'(x) = e^{x-1}+1>0$, $f'(1) = 2$. Ακόμη, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για το σύνολο τιμών της συνάρτησης θα ισχύει

$$f(\mathbb{R}) \overset{συνεχής}{\underset{γνησίως\,αύξουσα}{=}} (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R},\ \text{αφού,}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{x}^2+1) = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{x-1}+x) \underset{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}{\overset{x-1=y}{=}} -\infty$$

Γ3.i. Αφού $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{f(x)} = -\infty$ θα υπάρχει αριθμός $\kappa < 0$, ώστε $f(\kappa) < 0$. $f(0) = \mathrm{e}^{-1}$,

και αφού η f είναι συνεχής στο $[\kappa, 0]$ θα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο παραπάνω διάστημα. Θα υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, 0) \subseteq (-\infty, 0)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Αν τώρα $x>0$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει $f(x) > f(0) = e^{-1} > 0$. Άρα x_0 μοναδική ρίζα.

ii. **<u>α τρόπος:</u>** $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0$ (1)

Έστω ότι υπάρχει ρίζα $x_1 \in (x_0, +\infty)$ της (1) τότε $f^2(x_1) - x_0 \cdot f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) \cdot (f(x_1) - x_0) = 0$.

- $f(x_1) = 0$ ΑΤΟΠΟ, γιατί μοναδική ρίζα της f είναι το x_0.
- $f(x_1) = x_0 < 0$

  $\rightarrow$ Αν $x_1 \in (x_0, 1)$ τότε $f(x_1) = x_0 \Leftrightarrow e^{x_1-1} + x_1 = x_0$. Όμως,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &> x_0 \\ e^{x_1-1} &> 0 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1-1} + x_1 > x_0 \text{ ΑΤΟΠΟ.}$$

$\rightarrow$ Αν $x_1 \in [1,+\infty)$ τότε $f(x_1) = x_0 \Leftrightarrow x_1^{\,2} + 1 = x_0$. Όμως,

$$\left.\begin{aligned} x_1 \geq 1 \Leftrightarrow x_1^{\,2} \geq 1 \Leftrightarrow x_1^{\,2} + 1 \geq 2 \\ x_0 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ ΑΤΟΠΟ.}$$

Άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

β τρόπος: $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot(f(x) - x_0) = 0$

Άρα $f(x) = 0$ ή $f(x) = x_0$ (1).

Η (1) είναι αδύνατη διότι:

$$\left.\begin{aligned} \text{αν } x > x_0 \overset{f \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Rightarrow} \quad & f(x) > f(x_0) \\ \text{όμως } \quad & f(x_0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) > 0 > x_0. \text{ Άρα } f(x) - x_0 > 0.$$

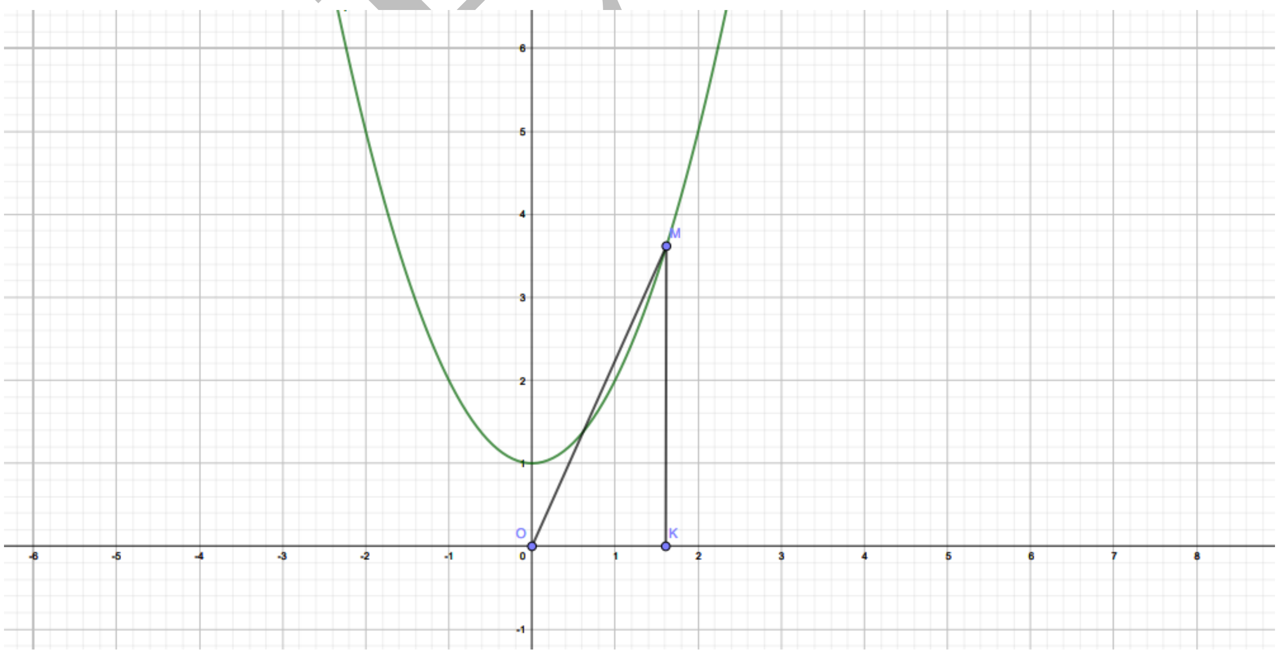
Συνεπώς $f(x) = 0$, η οποία από **(Γ3.i.)** έχει μοναδική λύση την $x = x_0 \notin (x_0,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

Γ4. $\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{OK}\cdot\mathrm{MK}}{2} = \dfrac{x(x^2+1)}{2} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{x}^3 + \mathrm{x})$**,** αφού $\mathrm{E} = \mathrm{E(t)}$ τότε $\mathrm{E(t)} = \dfrac{1}{2}((\mathrm{x(t)})^3 + \mathrm{x(t)})$ άρα

$$\mathrm{E'(t)} = \frac{1}{2}((\mathrm{x(t)})^3 + \mathrm{x(t)})' = \frac{1}{2}(3(\mathrm{x(t)})^2 \cdot \mathrm{x'(t)} + \mathrm{x'(t)}).$$

Την χρονική στιγμή $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$ ισχύει $\mathrm{E'(t}_o) = \dfrac{1}{2}(3(\mathrm{x(t}_o))^2 \cdot \mathrm{x'(t}_o) + \mathrm{x'(t}_o)) = \dfrac{1}{2}(6(\mathrm{x(t}_o))^2 + 2) = 28\tau\mu/\sec$.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **<u>α τρόπος:</u>** $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha \Leftrightarrow f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha.$$

Εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,1)$: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow y-(\alpha+\beta)=\alpha\cdot(x-1)\Leftrightarrow$

$$y=\alpha x-\alpha+\alpha+\beta \Leftrightarrow y=\alpha x+\beta.$$

Αφού η $y=-x+2$ εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,1)$έχουμε $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

<u>β τρόπος:</u> $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$

$f(1)=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=1$

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\frac{1}{x^2-2x+2}\cdot(2x-2)+\alpha$$

$f'(1)=-1\Leftrightarrow \alpha=-1$

Άρα $\beta=1-\alpha=2$.

Δ2. $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)-x+2 \Leftrightarrow f(x)+x-2=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)$

Για το $x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\geq 1$. Άρα $\ln(x^2-2x+2)\geq 0$.

Για $1\leq x\leq 2$ έχουμε $(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$. Έστω Ε το ζητούμενο εμβαδόν. $E=\int_1^2 (x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)\,dx$.

Θέτω $x-1=y$ οπότε $dx=dy$. Για $x=1$: $y=0$ και $x=2$: $y=1$.

$$E=\int_0^1 y\cdot\ln(y^2+1)\,dy=\left[\frac{y^2}{2}\cdot\ln(y^2+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{y^2}{2}\cdot\frac{2y}{y^2+1}\,dy=\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\int_0^1\frac{y^3}{y^2+1}\,dy=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\int_0^1\left(y-\frac{y}{y^2+1}\right)dy=\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\int_0^1 y\,dy+\int_0^1\frac{y}{y^2+1}\,dy=\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1+\frac{1}{2}\cdot\left[\ln(y^2+1)\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\ln 2=\ln 2-\frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

Δ3. i. Ισχύει $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1$. Η ισότητα ισχύει για $x=1$.

ii. **<u>α τρόπος:</u>** $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq f(\lambda)+\lambda-2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda+\frac{1}{2}\geq f(\lambda)+\lambda.$ Θεωρώ τη συνάρτηση k με

$k(x)=f(x)+x,\ x\in\mathbb{R}.$ Τότε $k'(x)=f'(x)+1\overset{(i)}{\geq}0$ και k συνεχής στο $\mathbb{R}.$ Άρα η k είναι γνησίως αύξουσα, αφού $\lambda+\frac{1}{2}>\lambda.$

β τρόπος: Η ανισοτική σχέση που ζητείται να αποδειχθεί μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας Θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$.

Δ4. Έστω $\left(x_{\mathrm{A}},f\left(x_{\mathrm{A}}\right)\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f και $\left(x_{\mathrm{B}},g\left(x_{\mathrm{B}}\right)\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_g. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη θα πρέπει $f'(x_{\mathrm{A}})=g'(x_{\mathrm{B}})$.
Από **(Δ3. i.)** ισχύει $f'(x_{\mathrm{A}})\geq -1$ για κάθε $x_{\mathrm{A}}\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_{\mathrm{A}}=1$.
Επιπλέον, η $g'(x_{\mathrm{B}})=-3{x_{\mathrm{B}}}^2-1\leq -1$ για κάθε $x_{\mathrm{B}}\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_{\mathrm{B}}=0$.
Άρα $f'(x_{\mathrm{A}})\geq -1\geq g'(x_{\mathrm{B}})$ για κάθε $x_{\mathrm{A}},x_{\mathrm{B}}\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_{\mathrm{A}}=1$ και $x_{\mathrm{B}}=0$.
Στο $x_{\mathrm{A}}=1$ η εφαπτομένη της C_f είναι η $y=-x+2$ από υπόθεση. Η εφαπτομένη της C_g στο $x_{\mathrm{B}}=0$ είναι η $y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y-2=-1\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=-x+2.$
Συνεπώς, μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g είναι η $y=-x+2$.