**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

*(Ενδεικτικές Απαντήσεις)*



## ΘΕΜΑ Α

**Α1**. Απόδειξη σελ. 135 σχολικού.

**Α2**. Διατύπωση θεωρήματος σελ. 51 σχολικού.

**Α3**. Ορισμός Ισότητας Συναρτήσεων σελ. 23 σχολικού.

**Α4**. **Α**) Σωστό
**Β**) Λάθος
**Γ**) Σωστό
**Δ**) Σωστό
**Ε**) Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

**Β1**. Στη δοθείσα σχέση θέτω : $w = x + 1 \Leftrightarrow x = w - 1$.
Οπότε $f(w) = we^{-w+1} \Leftrightarrow f(w) = we^{-w+1}$.
Άρα $f(x) = xe^{1-x}, x \in \mathbb{R}$.

**Β2**. Η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο της πολυωνυμικής συνάρτησης $y = x$ και της σύνθεσης συνεχών $y = e^{1-x}$.
Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :
$f'(x)' = e^{1-x} + x(e^{1-x})' = e^{1-x} + xe^{1-x}(1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$,
επειδή $e^{1-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο της $f'(x)$ καθορίζεται από το $1 - x$ οπότε :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$
Η $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

**ΟΛΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ**
$f(1) = 1$

Άρα στο $(-\infty, 1]$ η $f$ είναι γνησίως αύξουσα και στο $[1, +\infty)$ η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο με μέγιστη τιμή την $f(1) = 1$.

**Β3.**

$$f''(x) = [(1-x)e^{1-x}]' = (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' = -e^{1-x} + (1-x)e^{1-x}(-1)$$
$$= -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = (x-2)e^{1-x}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
Το πρόσημο της $f''(x)$ καθορίζεται από το πρόσημο του $x-2$.
Έτσι :
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

| $x$ | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | $\frown$ | | $\smile$ |

Η $f$ είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$.
Στο $x_0 = 2$ αλλάζουν τα κοίλα, ορίζεται η εφαπτομένη οπότε το σημείο $(2, f(2)) = (2, \frac{2}{e})$ είναι σημείο καμπής.

**Ασύμπτωτες**
Κατακόρυφη ασύμπτωτη η $C_f$ δεν έχει ως συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$.
Πλάγια ή οριζόντια
Επειδή το όριο της εκθετικής συνάρτησης είναι διαφορετικό όταν $x \to +\infty$ από ότι όταν $x \to -\infty$ έχουμε:

Στο $+\infty$

$\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}$ =(θέτω $u = 1-x$)= $\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u} = 0$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - 0\cdot x] = \lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{1-x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x-1}}$$

$$= (\text{κανόνας De L'Hospital}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Άρα η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Στο $-\infty$

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$$

Άρα στο $-\infty$ δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.

**Β4.**

i) $f\big((-\infty,1]\big) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty,1]$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x} = -\infty$

$f\big((1,+\infty)\big) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right) = (0,1)$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 1$

Άρα η ένωση των προηγούμενων δύο διαστημάτων δίνει το σύνολο τιμών $(-\infty,1]$.

ii) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

Αν $\lambda > 1$ η $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.

Αν $\lambda = 1$ η $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 1$.

Αν $0 < \lambda < 1$ η $f(x) = \lambda$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, μία στο $(-\infty,1)$ και μία στο $(1,+\infty)$ ως γνησία μονότονη σε καθένα διάστημα από αυτά.

Αν $\lambda \leq 0$ τότε έχει μοναδική ρίζα.

## ΘΕΜΑ Γ

### Γ1.

Στο $(-\infty, 0)$ η $f$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ η $f$ είναι συνεχής ως τριγωνομετρική.

Στο $x_0 = 0$ έχω :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1$$

$$f(0) = a \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ οπότε η $f$ είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x(\alpha x^2 - 3x - 1)}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

'Αρα η f όχι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

### Γ2.

i) Η $f$ συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$$f(0) = 1, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = 0$$

Άρα αφού $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ δεν ισχύει η μία από τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ii) Στο διάστημα $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$

Άρα το $\xi = \pi$ είναι μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$.

**Γ3.** Για $x \in (-\infty, 0)$ η εφαπτομένη στο $\big(x, f(x)\big)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$f'(x) = (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1)' = 3\alpha x^2 - 6x - 1$ .

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 3\alpha(-1) = 36 + 12\alpha = 12(3 + \alpha) < 0$ αφού $\alpha < -3$.

Άρα δεν υπάρχει σημείο $\big(x_0, f(x_0)\big)$ με $x_0 < 0$ όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

**Γ4.** Για $x < 0$ η $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$ γιατί είναι τριώνυμο ομόσημο του $3\alpha$ με $\alpha < 0$.

Στο $(0, \frac{3\pi}{2}]$ έχουμε ότι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου :

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $\pi$ | $3\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Η $f$ είναι συνεχής άρα είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[0, \pi]$ ( ή γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, \pi]$ ) και γνησίως αύξουσα στο $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

Στο $x_0 = \pi$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με ελάχιστη τιμή $f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$.

Άρα $f(x) \geq f(\pi) \Leftrightarrow f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$.

Η $f$ συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα και στο $[1, e]$.

- $f(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0$
- $f(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$

άρα $f(1) \cdot f(e) < 0$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (1, e)$ $οπότε\ lnx_0 = \frac{1}{x_0}$.

Η $f$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, άρα $\eta\ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Οπότε η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, +\infty)$ και επειδή έχει την $x_0$ που εξασφαλίσαμε, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

**Δ2.** Η $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x + 1) - \ln x - 1, x \in (0, +\infty)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η $f$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{\chi}$

$$f'(x) = 0 \iff \ln x_0 - \frac{1}{\chi} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{\chi}, \Leftrightarrow x = \frac{1}{lnx_0} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0.$$

Για το πρόσημο της $f'(x)$ έχουμε :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x_0 > \frac{1}{x} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x_0 \cdot x > 1 \overset{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{x_0} \cdot x > 1 \overset{x_0>0}{\Longleftrightarrow} x > x_0.$$

Ανάλογα $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < x_0$

| $x$ | 0 | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

Στο $(0, x_0]$ η $f$ γνήσια φθίνουσα και στο $[x_0, +\infty]$ η $f$ γνήσια αύξουσα. Άρα στο $x_0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το :

$$f(x_0) = (\ln x_0) \cdot (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 =$$

$$= x_0 \cdot \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1 =$$

$= x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - 1 = 0.$

**Δ3.**

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{(x_0)^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow e^{x+1}x = e^x (x_0)^{x+1} \Leftrightarrow$

$ex = (x_0)^{x+1} \quad (1)$

Αν $x \leq 0$ η (1) είναι αδύνατη οπότε η **(1)** ορίζεται στο $(0, +\infty)$.

Επομένως :

$\ln(ex) = \ln(x_0)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + 1 = (x+1)\ln x_0 \Leftrightarrow (x+1)\ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0.$

Άρα $g(x_0) = h(x_0)$.

Η $g(x) = xe^{-x}$ παραγωγίσιμη με $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$.

Η $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$

$g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}.$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = x_0 e^{-x_0}(\ln x_0 - 1) = \frac{x_0}{e^{x_0}}\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) = \frac{x_0}{e^{x_0}}\left(\frac{1-x_0}{x_0}\right) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

Άρα $g'(x_0) = h'(x_0)$.

Επειδή $g(x_0) = h(x_0)$ και $g'(x_0) = h'(x_0)$ οι $C_g, C_h$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0$.

**Δ4.**

Η απόσταση των σημείων $A\big(x, f(x)\big), B\big(x, \varphi(x)\big)$ για $x > 0$ είναι

$(AB) = \sqrt{(x-x)^2 + \big(f(x) - \varphi(x)\big)^2} = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x)$ αφού f(x)>φ(x)

(Αλλιώς, επειδή τα Α, Β έχουν την ίδια τετμημένη η απόσταση (ΑΒ) είναι η κατακόρυφη απόστασή τους οπότε $(AB) = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x)$ )

Έστω η συνάρτηση $t(x) = f(x) - \varphi(x), x > 0.$

Η $t$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την παραγωγισιμότητα της φ στο $x_0$.

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ τότε το $x_0$ είναι κρίσιμο σημείο της.

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ επειδή και η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ σύμφωνα με το θεώρημα παράγωγος αθροίσματος η $t(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ με $t'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0) = -\varphi'(x_0)$.

Το $x_0$ εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$ και η $t$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0$, οπότε από θεώρημα Fermat $t'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\varphi'(x_0) \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$ , άρα το $x_0$ κρίσιμο σημείο της φ.

Έτσι, το $x_0$ σε κάθε περίπτωση είναι κρίσιμο σημείο της φ.