Ενδεικτικές Λύσεις Μαθηματικά ΕΠΑΛ

2023

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη σελ 30 Σχολικό Βιβλίο

Α2. Ορισμός σελ 22 Σχολικό Βιβλίο

Α3. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

Θέμα Β $\quad f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 12x + 10 \quad x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$

Β1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x - 12$

Β2. Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της f στο $x_0 = 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(1)$

Επίσης $\varepsilon\varphi \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$

$\Leftrightarrow 6 + 2\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 3}$

Β3. Για $\alpha = 3 \quad f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$

και $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Η $f'(x)>0$ στα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $(1,+\infty)$ και f συνεχής στα $(-\infty,-2]$ και $[1,+\infty)$ ως πολ/κή οπότε f γν. αύξουσα στα $(-\infty,-2]$ και $[1,+\infty)$

Η $f'(x)<0$ στο διάστημα $(-2,1)$ και f συνεχής στο $[-2,1]$ ως πολ/κή οπότε η f γν. φθίνουσα στο $[-2,1]$

Παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο $x_1=-2$ το $f(-2)=30$ και τοπ. ελάχιστο στο $x_2=1$ το $f(1)=3$

Β4. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f'(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2+6x-12}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{6\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = 6(1+2)=18$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = 14 \Leftrightarrow \dfrac{520+18v_3}{v} = 14 \Leftrightarrow 520+18v_3 = 14v$ (1)

αφού

$\sum_{i=1}^{4} x_i v_i = 200+210+x_3v_3+x_4 5 = 410+18v_3+22\cdot 5 =$

$= 410+110+18v_3 = 520+18v_3$

$v_1+v_2+v_3+v_4 = v \Leftrightarrow 20+15+v_3+5 = v \Leftrightarrow 40+v_3 = v$ (2)

Η (1) λόγω της (2) γίνεται $520+18v_3 = 14(40+v_3)$

$520+18v_3 = 560+14v_3 \Leftrightarrow 4v_3 = 40 \Leftrightarrow v_3 = 10$

Γ2.

κλάσεις	x_i	v_i	$x_i v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	5	110
	Σ	50	700

Γ3. $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2 v_i}{v} = \dfrac{80\cancel{0}}{5\cancel{0}} = 16$ η διακύμανση

$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 v_i$
-4	16	320
0	0	0
-4	16	160
8	64	320
Σ		800

Γ4. $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$ η τυπική απόκλιση

$CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7} \simeq 0{,}29 \simeq 29\% > 10\%$

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Θέμα Δ $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

Δ1. $\forall x \neq 0$ $f'(x) = -\left(-\frac{1}{x^4}\cdot 2x\right) =$

$$= \frac{2}{x^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	↘	‖	↗

$x > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

$x < 0 \Leftrightarrow x^3 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$

- $f'(x) < 0$ για $x \in (-\infty, 0)$ οπότε f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$
- $f'(x) > 0$ για $x \in (0, +\infty)$ οπότε f γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Δ2. Για $x \in [-4, -1] \subseteq (-\infty, 0)$ έχουμε

$-4 \leq x \leq -1 \overset{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(-4) \geq f(x) \geq f(-1)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{(-4)^2} \geq f(x) \geq -\frac{1}{(-1)^4} \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι

$\varepsilon: y = \alpha x + \beta$, με $\alpha = f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2$

Άρα $\varepsilon: y = 2x + \beta$

Έχουμε $f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$ και

$M(1, -1) \in \varepsilon \Leftrightarrow -1 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$

Οπότε $\varepsilon: y = 2x - 3$

Δ4. Για τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ της $\varepsilon: y = 2x - 3$ έχουμε:

$y_i = 2x_i - 3$ με $i = 1, 2, 3$

Οπότε $\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$

Ακόμη $s_y = 2 s_x = 2 \cdot 2 = 4$

Άρα $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4}{5}$