



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Σχολικό βιβλίο σελ. 31

A.2 Σχολικό βιβλίο σελ. 22

A.3 Σχολικό βιβλίο σελ. 86-87

A.4

α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2^ο

B.1 Έχουμε $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0$ ή $8x^2-6x+1=0$.

Τότε $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{4}$ και $x=\frac{1}{2}$.

Το σύνολο των λύσεων είναι το διατεταγμένο σύνολο $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

Γνωρίζουμε ότι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ και τα ενδεχόμενα είναι διαφορετικά ανά δυο.

Άρα $P(A \cap B) < P(A) < P(A \cup B)$.

Επομένως $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Έχουμε $9x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ή $x = \frac{2}{3}$, $x \in \left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Επειδή $P(\Gamma) \geq 0$ ισχύει $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$.

B.2 $P(A' - B') = P(A' \cap (B')') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ (1)

Όμως $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}$

Άρα η (1) γίνεται $P(A' - B') = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Δ είναι $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

B.3 $P(E) = P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - \frac{1}{2}$

$= \frac{4}{12} + \frac{5}{12} - \frac{6}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

B.4 Έστω ότι τα Β, Γ είναι ασυμβίβαστα τότε

$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12} > 1$

Άτοπο γιατί $P(B \cup \Gamma) \leq 1$, άρα τα Β, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ 3^ο

Γ1. Από δεδομένα ισχύει: $f_1\% = 10$, $f_5\% = 30$ και τα αντίστοιχα κέντρα είναι

$x_1=9, x_2=11, x_3=13, x_4=15, x_5=17$

Αφού $\alpha_3=108^\circ$, $f_3 = \frac{\alpha_3}{360^\circ} \Leftrightarrow f_3 = \frac{108^\circ}{360^\circ} \Leftrightarrow f_3 = 0,3$

Άρα $f_3\% = 30$

Επίσης ισχύει

$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 10 + f_2\% + 30 + f_4\% + 30 = 100 \Leftrightarrow f_2\% + f_4\% = 30$ (1)

$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 \frac{x_i f_i\%}{100} \Leftrightarrow 14 = \frac{x_1 f_1\% + x_2 f_2\% + x_3 f_3\% + x_4 f_4\% + x_5 f_5\%}{100} \Leftrightarrow$

$1400 = 90 + 11f_2\% + 390 + 15f_4\% + 510$

$$11f_2\% + 15f_4\% = 410 \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $f_2\% = 30 - f_4\%$

Με αντικατάσταση στη (2) έχουμε

$$11(30 - f_4\%) + 15f_4\% = 410 \Leftrightarrow 330 - 11f_4\% + 15f_4\% = 410 \Leftrightarrow 4f_4\% = 80$$

Άρα $f_4\% = 20$ και $f_2\% = 10$

Γ2. Υπολογίζουμε το

$$s^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i\%}{100} = \frac{(9-14)^2 \cdot 10 + (11-14)^2 \cdot 10 + (13-14)^2 \cdot 10 + (15-14)^2 \cdot 10 + (17-14)^2 \cdot 10}{100} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{660}{100} \Leftrightarrow s^2 = 6,6$$

Έτσι $s^2 = 6,6 \Leftrightarrow s = \sqrt{6,6} \Leftrightarrow s \approx 2,57$

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2,57}{14} \approx 0,184 \Leftrightarrow CV = 18,4\%$$

Επειδή $CV = 18,4\% > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. Ισχύει

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i + x_5 \cdot v_5}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} + \frac{x_5 \cdot v_5}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} + x_5 \cdot f_5 = 14 \Leftrightarrow$$

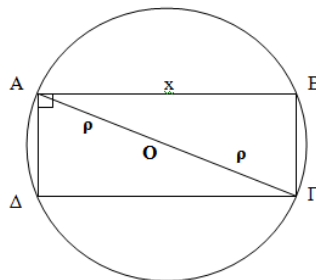
$$\frac{1780}{v} + 17 \cdot 0,3 = 14 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} = 8,9 \Leftrightarrow v = \frac{1780}{8,9} \Leftrightarrow v = 200$$

Γ4. Επειδή $\beta_i = \frac{a_i - \bar{a}}{s_a} \Leftrightarrow \beta_i = \frac{1}{s_a} a_i - \frac{\bar{a}}{s_a}$ από την εφαρμογή 3 του σχολικού

βιβλίου στη σελίδα 99 ισχύει: $\bar{\beta} = \frac{1}{s_a} \bar{a} - \frac{\bar{a}}{s_a} = 0$ και $s_B = \left| \frac{1}{s_a} \right| s_a = \frac{s_a}{s_a} = 1$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δ.1



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Άρα εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα
 $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$. Άρα $ΑΓ = 2ρ = 10$

$$100 = x^2 + ΒΓ^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow ΒΓ = \sqrt{100 - x^2}$$

Πρέπει $100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10$ και $x > 0$. Άρα $x \in (0, 10)$.

Τότε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου $E = ΑΒ \cdot ΒΓ = x\sqrt{100 - x^2}$, $x \in (0, 10)$

Δ.2 Αφού $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, $x \in (0, 10)$

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \frac{(-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(100 - x^2) - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{50}$$

	0	$5\sqrt{2}$	10
f'		+	-
f		↗	↘

Τότε για $x = 5\sqrt{2}$, $ΒΓ = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$. Άρα το ορθογώνιο τετράγωνο.

Δ.3 Παρατηρώ ότι $f(1) = \sqrt{100 - 1} = \sqrt{99}$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{x}$$

$$f'(1) = \frac{98}{\sqrt{99}}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ.4 Γνωρίζουμε ότι $A - B \subseteq A$, $P(A - B) \leq P(A)$,

Αφού $P(A)$, $P(A - B) \in (0, 1]$ και f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 5\sqrt{2})$ ισχύει

$$f(P(A - B)) \leq f(P(A)) \Leftrightarrow$$

$$P(A - B) \cdot \sqrt{100 - P^2(A - B)} \leq P(A) \cdot \sqrt{100 - P^2(A)}$$

$$\frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}} \quad (1)$$

Ισχύει

$$\begin{aligned} 0 < P(A-B) \leq 1 &\Leftrightarrow P^2(A-B) \leq 1 \Leftrightarrow -P^2(A-B) \geq -1 \Leftrightarrow 100 - P^2(A-B) \geq 99 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{100 - P^2(A-B)} = \sqrt{99} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}} \end{aligned}$$

Επειδή $0 \leq P(A) \leq 1$ προκύπτει $\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}} < 1$

Εν τέλει $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} < \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < 1$

Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 5\sqrt{2})$ ισχύει

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$$